ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය

Ruwan Darshana
B.Sc. (Hons)

ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය යනු :-

- යම් වස්තුවකට ***සමමිතික අක්ෂයක් පවතී නම්***, එම සමමිතික අක්ෂය මත ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය පැවතිය යුතුය.

- යම් වස්තුවකට ***සමමිතික අක්ෂ කීපයක් පවතී නම්***, ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍ය ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය වේ.

අංශු පද්ධතියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සෙවීම :-
(කාටීසීය ඛණ්ඩාංක මගින් ලබාගැනීම)

සංයුක්ත වස්තුවල ගුරුත්ව කේන්ද්‍ර සෙවීම :-

කුහර වස්තුවල ගුරුත්ව කේන්ද්‍ර සෙවීම :-

සම්මත වස්තූන්ගේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍ර සෙවීම.

01 ඒකාකාර වෘත්ත චාපයක :-

02 ඒකාකාර වෘත්ත ඛණ්ඩයක (ආස්තරයකි) :-

03 ඝන අර්ධගෝලයක :-

Scanned with CamScanner

04 ඝන කේතුවක :-

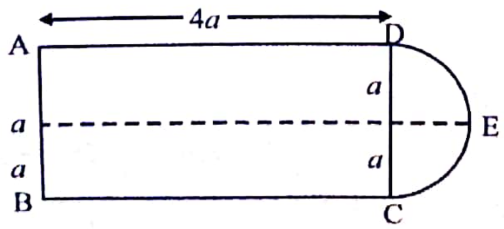
05 කුහර අර්ධගෝලයක :-

06 කුහර කේතුවක :-

A

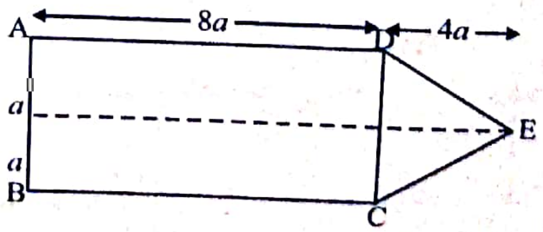
01. එකම ද්‍රව්‍යයෙන් සාදා ඇති පහත සංයුක්ත වස්තූන්ගේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රවලට AB සිට දුර සොයන්න.

[1]



ABCD - ඝන සිලින්ඩරය
DCE - ඝන අර්ධගෝලය

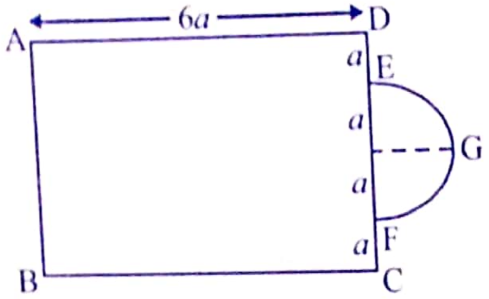
[2]



ABCD - ඝන සිලින්ඩරය
DCE - ඝන කේතුව

Scanned with CamScanner

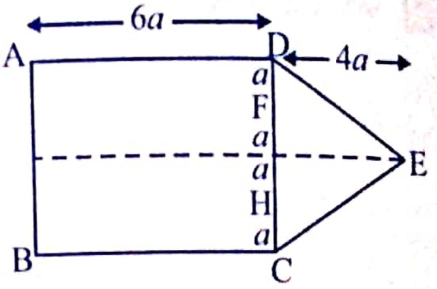
[3]



ABCD - ඝන සිලින්ඩරය

EFG - ඝන අර්ධගෝලය

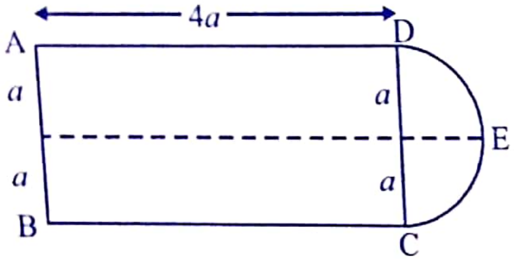
[4]



ABCD - ඝන සිලින්ඩරය

EFH - ඝන කේතුව

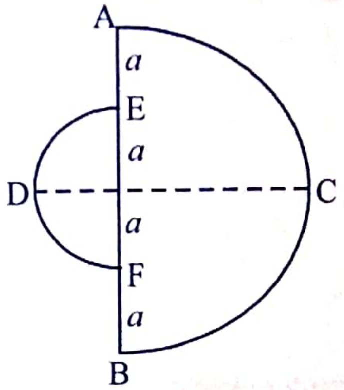
[5]



ABCD - සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ආස්තරය

DEC - අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරය

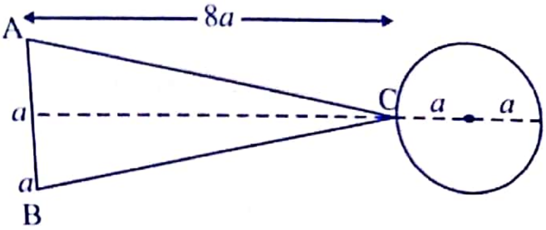
[6]



ABC - අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරය

EDF - අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරය

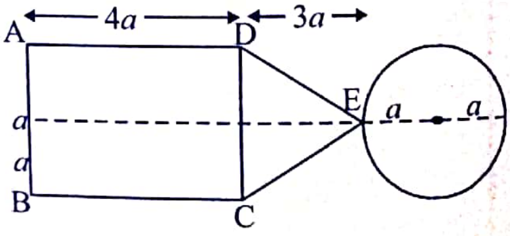
[7]



ABC - ඝන කේතුව

ඝන ගෝලය

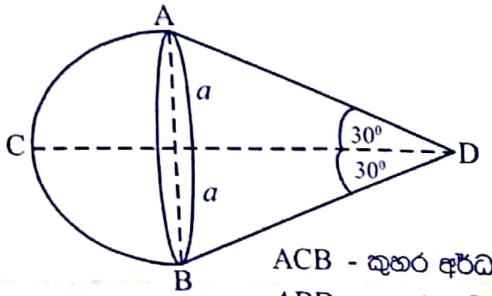
[8]



සෘජුකෝණාස්‍රය

අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරය

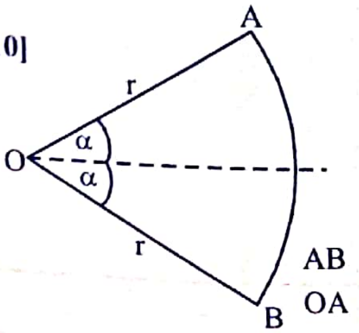
[9]



ACB - කුහර අර්ධගෝලය

ABD - කුහර කේතුව

[10]

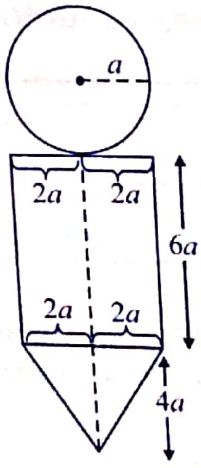


AB - වෘත්තචාපය

OA - අරය

OB - අරය

[11]

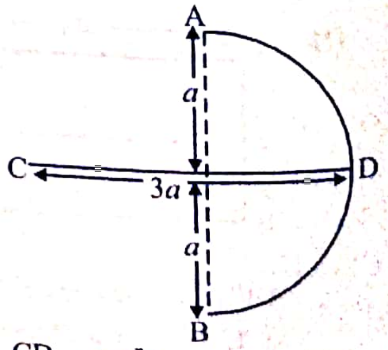


ඝන ගෝලය

ඝන සිලින්ඩරය

ඝන කේතුව

[12]



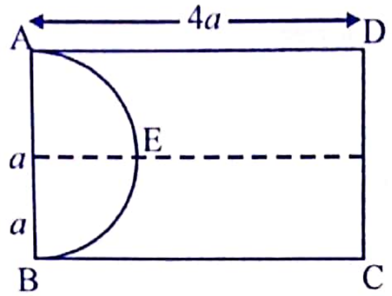
CD - දණ්ඩ

AB - වෘත්ත චාපය අර්ධ වෘත්තාකාර

Scanned with CamScanner

02. කුහර වස්තූන්ගේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට AB සිට දුර සොයන්න.

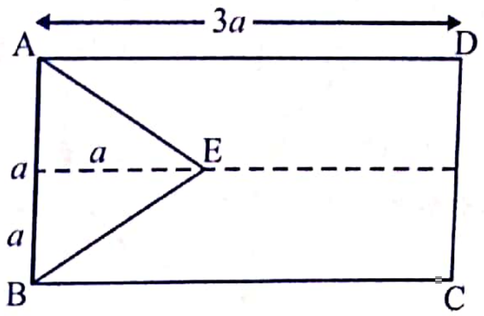
[1]



ABCD - ඝන සිලින්ඩරය

ABE - අර්ධගෝලය

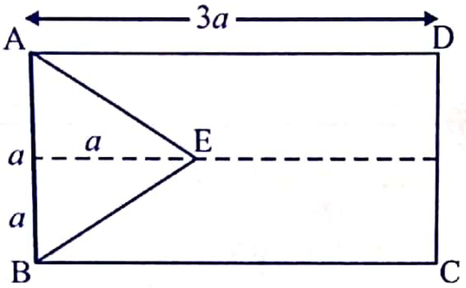
[2]



ABCD - ඝන සිලින්ඩරය

ABE - ඝන කේතුව

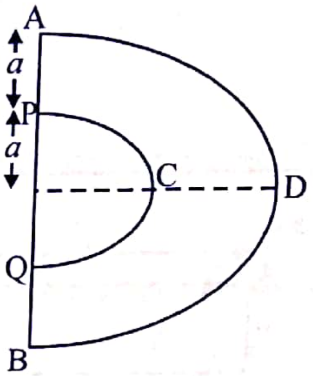
[3]



ABCD - සෘජුකෝණාස්‍රය

ABE - ත්‍රිකෝණය

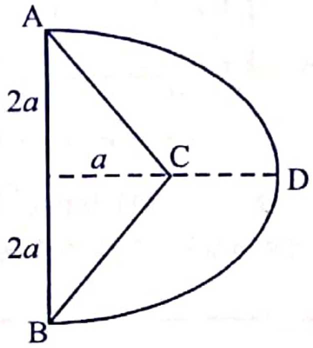
[4]



ABD - අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරය

PCQ - අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරය

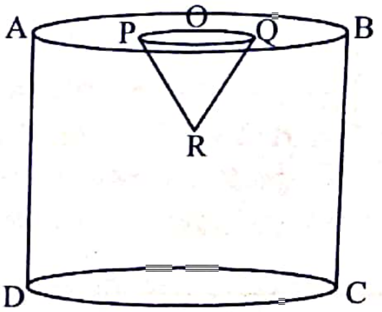
[5]



ABD - ඝන අර්ධගෝලය

ABC - කේතුව

[6]



OQ - r

OB - 4r

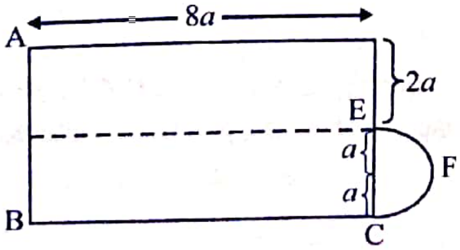
AD - 4h

ABCD - ඝන සිලින්ඩරය

B

03. ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර සොයන්න.

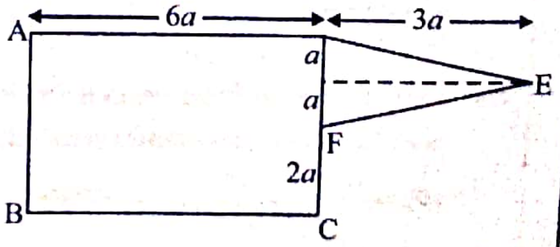
[1]



ABCD - ඝන සිලින්ඩරය

EFC - ඝන අර්ධගෝලය

[2]

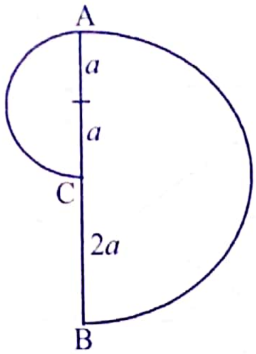


ABCD - සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ආස්තරය

DEF - ත්‍රිකෝණය

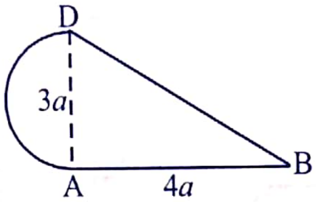
Scanned with CamScanner

[3]



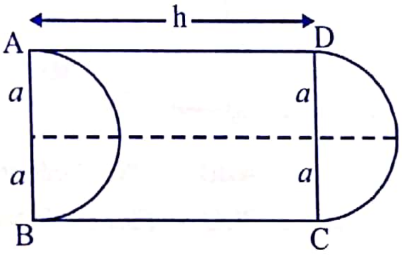
අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තර දෙකකි.

04. ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සොයන්න.



C

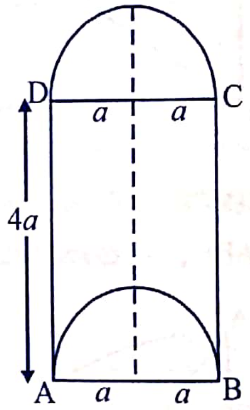
05. [1]



ABCD - ඝන සිලින්ඩරයකි.

අරය a වන ඝන අර්ධගෝලයක් AB වලින් කපා ඉවත්කර, AB සිට CD ට අලවනු ලැබේ. AB සිට ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර සොයන්න.

[2]



ABCD - සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ආස්තරයකි.

AB වලින් අර්ධ වෘත්තයක් ඉවත්කර එය DC කෙළවරට සවිකර ඇත.

D

06. අරය r වූ ඝන අර්ධ ගෝලයක් හා අර්ධගෝලයේ ඝනත්වය මෙන් දෙගුණයක් සහිත අරය r ද උස $4r$ ද වූ ඝන කේතුවක් ඒවායේ තල ආධාරක සම්බන්ධ කිරීමෙන් තනි වස්තුවක් සාදා තිබේ. පොදු ආධාරක කේන්ද්‍රයේ සිට වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට ඇති දුර සොයන්න.

07. අරයන් සමාන කුහර අර්ධගෝලයක් හා අරය මෙන් තුන් ගුණයක් උස කුහර සිලින්ඩරයක් වෘත්තාකාර ආධාරක එකිනෙක බද්ධ කිරීමෙන් තනි වස්තුවක් සාදා තිබේ. පොදු වෘත්ත ආධාරක පෘෂ්ඨයේ සිට වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර සොයන්න. අර්ධගෝලයේ පෘෂ්ඨීය ඝනත්වය, සිලින්ඩරයේ පෘෂ්ඨීය ඝනත්වය මෙන් දෙගුණයකි.

08. ඒකාකාර ඝන ගෝලයක අරය R වන අතර එහි අරය r වූ ගෝලාකාර කුහරයක් හි විදිනු ලැබේ. සිදුරේ සහ ගෝලයේ, ගෝලාකාර පෘෂ්ඨ P හිදී ස්පර්ශ වෙයි. G යනු සිදුරු කරන ලද ගෝලයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය වන විට $PG = \dfrac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$ බව පෙන්වන්න.

09. අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයකින් එහි ආධාරකයට ඇති උස $h\,(< a)$ වූ සෘජුවෘත්ත කේතුවක් හාරා ඉවත්කොට ඇත. ඉතිරි කොටසේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සොයා එය සිදුරේ ශීර්ෂය සමඟ සම්පාත වෙයි නම් $h = (4-\sqrt{7})\,\dfrac{a}{3}$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

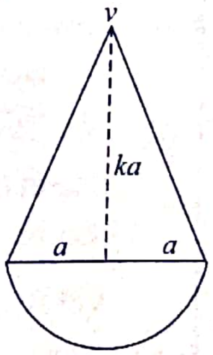
10. දිග $2r(\alpha + 1)$ වන ඒකාකාර කම්බියක් මගින් සංවෘත තල රූපයක් සාදනු ලැබේ. එහි වෘත්ත චාපයක ආකාර වූ කොටස $2r\alpha$ දිගින් යුක්ත වන අතර වෘත්ත චාපයට සම්බන්ධ වූ r දිගැති අරය දෙකක් ද වන සේ කම්බිය නමා තිබේ. වෘත්තාකාර චාපයේ කේන්ද්‍රයේ සිට කම්බියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර සොයන්න.

11. a දිගින් ද W බරින් ද යුත් ඒකාකාර කම්බියක් ABC අර්ධ වෘත්තාකාර තැටියක (ACB අර්ධ වෘත්ත චාපයෙන් ද AB විෂ්කම්භයෙන් ද සමන්විත) පරිමිතිය සෑදෙන සේ තබා ඇත. AB මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ සිට නැමි කම්බියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $2a / (2 + \pi)^2$ බව පෙන්වන්න.

12. වෘත්තාකාර ආස්තරයකින්, සමචතුරස්‍රාකාර සිදුරක් විදිනු ලැබේ. සමචතුරස්‍රයේ විකර්ණය වෘත්තයේ අරයක් වෙයි. ඉතිරි කොටසේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයේ සිට දුර $\dfrac{a}{8\pi - 4}$ බව පෙන්වන්න. a යනු වෘත්තයේ විෂ්කම්භයයි.

13. අරය r වන වෘත්තාකාර තැටියකින්, එහි අරය විෂ්කම්භය වන වෘත්තාකාර කොටස් ඉවත් කරනු ලැබේ. ඉතිරි කොටසේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට තැටියේ කේන්ද්‍රයේ සිට දුර $\dfrac{1}{6}r$ බව පෙන්වන්න. ඉවත් කරන කොටසේ පරිධිය, තැටියේ කේන්ද්‍රය මත පිහිටන සේ වෘත්තාකාර තැටිය ඉවත් කරන්නේ යයි සළකන්න.

14. රූපයේ ආකාරයට ඝන අර්ධ ගෝලයක් හා ඝන කේතුවක් අක්ෂ සමපාත වන පරිදි තබා ඇත. වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට, V සිට දුර $\dfrac{(3k^2 + 8k + 3)\,a}{4\,(k + 2)}$ බව පෙන්වන්න. වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, පොදු ආධාරකය මත පවතී නම්, k සොයන්න.

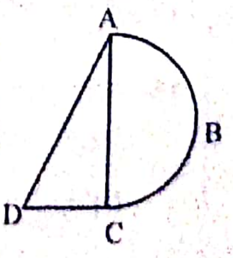


15. ඒකාකාර ඝන කේතුවකින් කපාගත් උස h වූ ජින්නකයක දෙකෙළවර අරයන් a සහ $3a$ වේ. ජින්නකය තුළින් සිලින්ඩරාකාර සිදුරක් විදිනු ලැබේ. සිදුරේ අක්ෂය කේතුවේ අක්ෂම සමඟ සමපාත වන අතර සිදුරේ අරය a වේ. ඉතිරි කොටසේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය ජින්නකයේ විශාලතම මුහුණතේ සිට $\dfrac{3h}{10}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

16. කේන්ද්‍රය O ද විෂ්කම්භය $AB = 4a$ ද වන ඒකාකාර අර්ධවෘත්තයකින් විෂ්කම්භය OA හා OB වන අර්ධවෘත්ත කපා ඉවත් කරන ලදී. ඉතිරි කොටසේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට ඇති දුර සොයන්න.

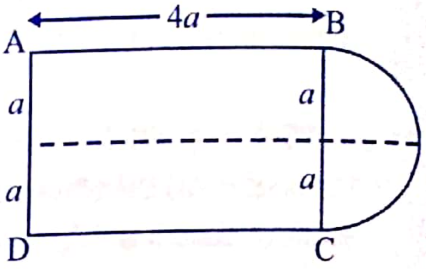
17. ඒකාකාර ආස්තරයක් විෂ්කම්භය $AB = 2r$ වන අර්ධ වෘත්තයෙන්ද පාදයක දිග x වන ACDE සමචතුරස්‍රයෙන්ද සමන්විතය. මෙහි E ලක්ෂ්‍යය AB මත වෙයි. ආස්තරයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය AB මත පිහිටා ඇත්නම් $3x^3 = 2r^3$ බව පෙන්වන්න.

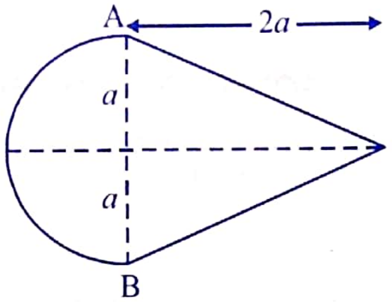
18. රූපයේ දැක්වෙන තල රාමුව ඒකාකාර තුනී කම්බියකින් සාදා ඇත. රාමුව AC, CD හා DA සරල රේඛීය කොටස් තුනකින් ද අරය 8 cm වන අර්ධ වෘත්තයකින්ද සමන්විතය. ACD කෝණය $= 90^0$ ද $CD = 2x$ cm ද වෙයි. රාමුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය AC මත පිහිටා ඇත්නම් $3x^2 = 64$ බව පෙන්වන්න.



Scanned with CamScanner

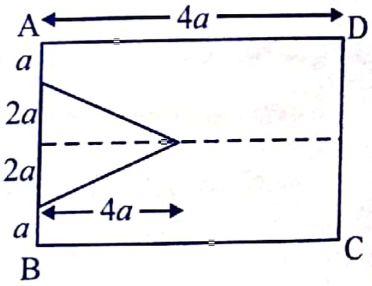
19. ඝන අර්ධ ගෝලයක් හා ඝන සිලින්ඩරයක් සංයුක්ත කර සාදා ඇති වස්තුව B වලින් සිරස් තන්තුවකින් එල්ලා ඇත. BC ගේ සිරසට ආනතිය සොයන්න.





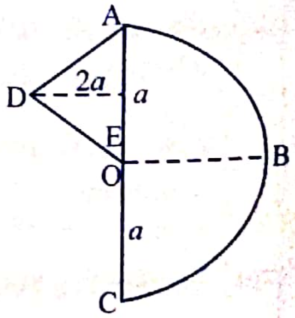
20. අර්ධගෝලයේ ඝනත්වය කේතුව මෙන් තුන් ගුණයකි. වස්තුව A වලින් සිරස් තන්තුවකින් එල්ලා ඇතිවිට AB ගේ සිරසට ආනතිය සොයන්න.

21. අරය $3a$ ද, උස $8a$ වන ඝන සිලින්ඩරයකින්, අරය $2a$ වන කේතුවක් ඉවත්කර ඇත. ඉතිරි වස්තුව A වලින් තන්තුවකින් එල්ලා ඇත. AB ගේ සිරසට ආනතිය සොයන්න.

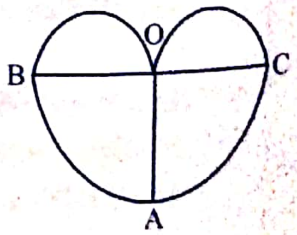


22. අරය a ද, කේන්ද්‍රයෙහි 2α කෝණයක් ආපාතනය කරන ඒකාකාර වෘත්ත චාපයක හැඩය ගත් කම්බියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙහි පිහිටීම සොයන්න. ABC ඒකාකාර කම්බි කැබැල්ලක් AB වෘත්ත පාදයක හා BC, CA පර්යන්ත අරයයන් ආකාරය ගනී. මේ කම්බි කැබැල්ලේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න. ABC කම්බි කැබැල්ල A න් නිදැල්ලේ එල්ලෙයි නම්, සමතුලිතතා පිහිටුමේදී CA සිරස සමඟ $\tan^{-1}\left[\frac{3}{\pi+1}\right]$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න.

23. ABC ඒකාකර අර්ධ වෘත්ත ආස්තරයකි. අරය a වේ. AOD සමද්විපාද ත්‍රිකෝණාකාර ආස්තරයකි. $DE = 2a$ වේ. සංයුක්ත වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න. A වලින් එල්ලා සමතුලිත විට AO සිරසට ආනත කෝණය ද ලබාගන්න.



24. අරය සෙ.මී. 1 බැගින් වන ඒකාකාර අර්ධ වෘත්ත ආස්තර දෙකක් හා අරය සෙ.මී. 2 ක් වන එම ද්‍රව්‍යයෙන්ම සෑදි ඒකාකාර අර්ධ වෘත්ත ආස්තරයක් රූපයේ පරිදි එක් කිරීමෙන් පාසැල් ලාංඡනයක් සාදා ඇත. O සිට ලාංඡනයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර $\frac{4}{3\pi}$ බව පෙන්වන්න. පද්ධතිය B වලින් එල්ලා සමතුලිත විට BC සිරසට ආනත කෝණය $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3\pi}\right)$ බව පෙන්වන්න.



25. ABC ත්‍රිකෝණයේ $AB = BC = 2a$ සහ $AC = 2a\sqrt{2}$ වේ. එම ද්‍රව්‍යයෙන්ම සෑදි BC විශ්කම්භය වන අර්ධ වෘත්ත ආස්තරය හා ත්‍රිකෝණය BC පාදය දිගේ සවිකර තල ආස්තරයක් සාදා ඇත. පද්ධතිය B වලින් එල්ලා සමතුලිත වේ. AB සිරසට ආනත කෝණය $\tan^{-1}\left[2 + \frac{3\pi}{4}\right]$ බව පෙන්වන්න. AB මත P ලක්ෂ්‍යයක් ගෙන APC ත්‍රිකෝණය කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. ඉතිරි කොටස BC සිරස් වන සේ සමතුලිතව එල්ලේ නම්, BP දුර සොයන්න.

Scanned with CamScanner

26. ආධාරකයේ අරය r ද, අඩ සිරස් කෝණය α ද වන ඒකාකාර ඍජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ශීර්ෂයේ සිට $\frac{3}{4} r \cot \alpha$ දුරකින් අඩය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

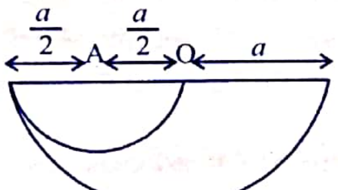
ඒකාකාර ඍජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ඡින්නකයක වෘත්තාකාර දෙකෙළවරේ අරයන් a හා λa $(\lambda > 1)$ ද උස h ද වෙයි. කුඩාතම ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට ඡින්නකයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර $\frac{h}{4}\left(\frac{3\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1}\right)$ බව පෙන්වන්න. කුඩාතම ආධාරකයෙහි පරිධියේ වූ ලක්ෂ්‍යයකින් ඡින්නකය නිදහස් ලෙස එල්ලනු ලැබේ. සමතුලිතතා පිහිටීමේදී අඩය සිරසට $\alpha \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනත වේ. $\tan \alpha$ සොයන්න.

27. ස්කන්ධය M ද, අර්ධ විෂ්කම්භය a ද වන ඒකාකාර අර්ධ ගෝලීය පාත්‍රයක අරයට සම්බන්ධ කොට ඇති ස්කන්ධය m ද, දිග l ද වන ඒකාකාර සිහින් මිටකින් සමන්විත මේස හැන්දක කේන්ද්‍රය සොයන්න.

මෙම මේස හැන්ද වක්‍රාකාර පෘෂ්ඨය තිරස් මේසයක් මත ගැටෙන සේ තැබූ විට $l = 4a$ නම්, $\frac{m}{M} < \frac{\sqrt{6}}{72}$ වන කළ හැන්දේ මිටෙහි අග කෙළවර මේසයේ නොවදින බව පෙන්වන්න.

28. ඒකාකාර වෘත්ත චාපයක කේන්ද්‍රකය සොයන්න. ABC වනාහී ඒකාකාර සිහින් දණ්ඩකින් සාදා ඇති හැරමිටියකි. එහි කෙළින් පිහිටා ඇති AB කොටස $2l$ දිගින් යුක්ත වෙයි. CB කොටස අර්ධ විෂ්කම්භය $a\ (< 1)$ වූ අර්ධ වෘත්තයක හැඩය ගනී. BC යා කරන රේඛාව AB ට ලම්භ වේ. තිරස් මේසයක් මත C කෙළවර ගැටෙමින් AB කොටස සිරසට $\theta <$ ආනත වන සේ හැරමිටිය එල්ලෙමින් පවතින විට $\tan\theta = \frac{a(\pi a + 4l)}{2(l^2 - a^2)}$ බව පෙන්වන්න.

29.



ඒකාකාර අරය a හා කේන්ද්‍රය O වන ඝන අර්ධ ගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සමමිතික අරය මත O සිට $\frac{3a}{8}$ දුරින් බව පෙන්වන්න. අරය a වන ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයෙන් කේන්ද්‍රය A, අරය $\frac{a}{2}$ වන ඝන අර්ධ ගෝලය හාරා ඉවත්කර ඇත. ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය තිරස් තලය ස්පර්ශව සමතුලිත නම්, OA තිරසට ආනත කෝණය සොයන්න.

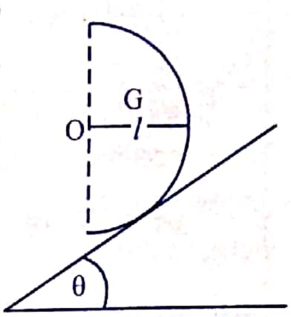
30. කම්බියක් ACB අර්ධ වෘත්තාකාර චාපයක ආකාර ගනී. C යනු චාපයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයයි. $AB = 2a$ සහ O යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයයි. O සිට චාපයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\frac{2a}{\pi}$ බව පෙන්වන්න. ඒනයින් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ ACB සහ AB මගින් පර්යන්ත ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට දුර $\frac{4a}{\pi}$ බව පෙන්වන්න. මෙම ආස්තරයේ ගැටියට ස්කන්ධය M වූ අර්ධ වෘත්ත කම්බියක් පාස්සන ලදී. ආස්තරයේ ස්කන්ධය 3M නම් සංයුක්ත වස්තුව B ගෙන් නිදහස්ව එල්ලූ විට AB සිරසට ආනත කෝණය සොයන්න.

31. ACB අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක විෂ්කම්භය AOB ද, OC අරය AB ට ලම්බ ද වෙයි. OPQR සමචතුරස්‍රය කොටසක් ආස්තරයෙන් කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. P යනු AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් වන අතර $OP = \frac{a}{2}$ වෙයි. ඉතිරි කොටසේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට OA සහ OC සිට දුර සොයන්න. a යනු අරයයි. මෙම ආස්තරය A ගෙන් එල්ලූ විට සමතුලිතතාව පවතී. AB සිරස සමඟ ආනත කරන කෝණයේ ටැංජනය $\frac{1}{2}$ ට වඩා යන්තමින් අඩු බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

32. කේන්ද්‍රය O වූ ද අරය a වූ ද කේන්ද්‍රයේදී 2α කෝණයක් ආපාතන කරන්නා වූද AB වෘත්ත චාපයක් සහ OA, OB අරය දෙකද අඩංගු වන සේ ඒකාකාර කම්බියක් නමා තිබේ. මෙම කම්බිය A ගෙන් නිදහසේ එල්ලූ විට OA අරය, සිරසට ආනත කරන කෝණය සොයන්න.

33. අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයකින් උස a ද ආධාරකයේ අරය a ද වූ සෘජුවෘත්තාකාර කේතුව ඉවත් කිරීමෙන් ඝන වස්තුවක් සාදා තිබේ. අර්ධ ගෝලයේත්, කේතුවේත් තල ආධාරක සම්පාත වන අතර දෙකෙහිම පොදු කේන්ද්‍රය O වෙයි. ඝන වස්තුවේ G ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට දුර සොයන්න. තිරසට θ කෝණයක් ආනත වූ රළු තලයක් සමග ඉහත කී ඝන වස්තුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ ලක්ෂ්‍යයක් ස්පර්ශ වෙයි. වස්තුව සමතුලිතව පිහිටන අවස්ථාව දැක්වෙන රූපයක් දී තිබේ. තලයේ වැඩිතම බෑවුම් රේඛාව අඩංගු සිරස් තලයේ O සහ G පිහිටයි. OG තිරස් නම් $\theta = 30^0$ බව පෙන්වන්න.



W යනු අර්ධ ගෝලයේ බර නම් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේදී අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාවත් ඝර්ෂණ බලයත් W ඇසුරින් ලබාගන්න. ඝර්ෂණ කෝණය λ නම්, $\lambda = 30^0$ බව පෙන්වන්න.

F

34. අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක් ද, අරය a සහ උස h වූ ඒකාකාර ඝන සිලින්ඩරයක් ද එකම ද්‍රව්‍යයකින් සාදා ඇත. අර්ධ ගෝලයේ වෘත්තාකාර ආධාරකයට සිලින්ඩරයේ තල මුහුණතක් සවිකර ඇත. සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට තල ආධාරක කෙළවරේ සිට දුර සොයන්න. වක්‍ර පෘෂ්ඨය සුමට තිරස් තලයක් මත පිහිටන පරිදි වස්තුව තබනු ලැබේ. ඕනෑම පිහිටීමකදී වස්තුව නිශ්චලතාවයෙහි ඇත්නම්, $h\sqrt{2} = a$ බව පෙන්වන්න.

35. අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න. a අරයෙන් යුත් අර්ධ ගෝලයක තල ආධාරකය මත නංවන ලද උස h හා ආධාරක අරය a වූ සෘජුවෘත්ත කේතුවකින් සමන්විත ඒකාකාර ඝන වස්තුවක් රළු තිරස් මේසයක් මත නිශ්චලතාවයේ තිබෙයි. අර්ධ ගෝලය මේසය හා ස්පර්ශ වී පවතියි. $\sqrt{3}a$ ට වඩා h අඩුවෙයි නම්, ඝන වස්තුවේ මේ සමතුලිතතා පිහිටීම ස්ථායි වන බව පෙන්වන්න.

36. තල ආධාරකයේ අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එම ආධාරකයේ සිට $\dfrac{3a}{8}$ දුරින් පිහිටන බව අනුකලනය මඟින් පෙන්වන්න. ඒකාකාර ඝන වස්තුවක් සාදා ඇත්තේ අරයන් a වූ සමපාත තල ආධාරක එකට පෑස්සූ ඝන අර්ධ ගෝලයකින් සහ අඩ සිරස් කෝණය α වූ සෘජු වෘත්ත කේතුවකිනි. මෙම වස්තුව අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨයෙහි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් තිරස් මේසයක් මත ස්පර්ශ කරමින් සමතුලිතතාවයේ තිබිය හැකි නම්, α හි අගය සොයන්න.

37. අර්ධ විෂ්කම්භය a වූ ගෝලයකින් කපාගන්නා ලද උස $\dfrac{a}{2}$ වන ඛණ්ඩයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න. මේ ඛණ්ඩකය දැන් පතුලේ අර්ධ විෂ්කම්භය $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ද, උස h ද වන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක් හා සමඟ තල මුහුණත් දෙක සමපාත වන සේ සම්බන්ධ කරනු ලැබේ. $2h < (2 + \sqrt{13})\ a$ නම්, ගෝලීය ඛණ්ඩකයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය තිරස් රළු තලයක් මත ගැටෙමින් සංයුක්ත වස්තුව ස්ථායි සමතුලිතතාවයේ පිහිටිය හැකි බව පෙන්වන්න.

38. අරය a වූ අර්ධ වෘත්තාකාර චාපයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න. නැවක නැංගුරමක් සාදා ඇත්තේ අරය a හා ස්කන්ධය M වන අර්ධ වෘත්තාකාර කම්බියක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට ස්කන්ධය m හා දිග $2h\ (> 2a)$ වූ සෘජු බාල්කයක් සවි කිරීමෙනි. මෙම නැංගුරමේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය රළු තිරස් තලයක් මත තබනු ලැබේ. නැංගුරමට සමතුලිත පිහිටීමෙන් කුඩා විස්ථාපනයක් ලබාදුන් විට එය නැවත පළමු සමතුලිත පිහිටීමට පැමිණේ නම්, $M > \dfrac{\pi m}{2a}\ (h - a)$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

39. අරය r වන ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න. ඒකාකාර ඝනකයක එක් මුහුණතක් ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ආධාරකයට ඇලා ඇත්තේ ඝනකයෙහි මෙම මුහුණතේ විකර්ණ අර්ධ ගෝලයෙහි ආධාරකයේ විෂ්කම්භය ලෙස පිහිටන අන්දමටය. අර්ධ ගෝලය තනා ඇති ද්‍රව්‍යයේ ඝනත්වය ρ_1 ද, ඝනකය තනා ඇති ද්‍රව්‍යයේ ඝනත්වය ρ_2 ද වෙයි නම්, සංයුක්ත වස්තුවට අර්ධ ගෝලයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් තිරස් තලය සමඟ ස්පර්ශ වෙමින් සමතුලිතව පිහිටිය හැක්කේ $\pi\rho_1 = 8\rho_2$ විට බව පෙන්වන්න.

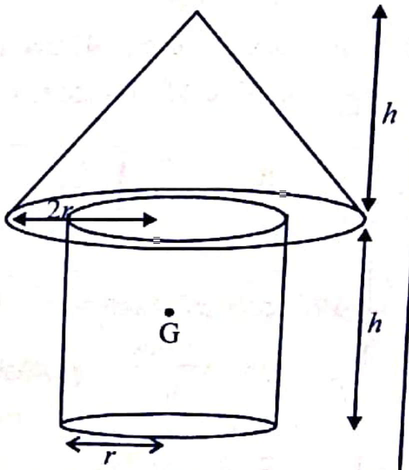
40. (i) අරය a ද, පෘෂ්ඨික ඝනත්වය σ ද වූ ඒකාකාර අර්ධ ගෝලීය කබොලකත්

(ii) උස h ද, අඩ සිරස් කෝණය α ද පෘෂ්ඨික ඝනත්වය $k\sigma$ ද වූ ඒකාකාර කුහර කේතුවකත් ස්කන්ධය හා ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම අනුකලනයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ සොයන්න.

$\alpha = h \tan \alpha$ බවත්, පෘෂ්ඨ දෙක පොදු වෘත්තයෙන් දෙපස පිහිටන පරිදි ඒවායේ වෘත්ත දාර දිගේ එකට මූට්ටු වී ඇති බවත් දී තිබෙයි. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{36+k^2}-k}{6}$ නම්, අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨයේ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් සුමට තිරස් තලයක් සමඟ ස්පර්ශ වෙමින් සංයුක්ත වස්තුවට සමතුලිතාවයේ පිහිටිය හැකි බව පෙන්වන්න.

41. උච්චය h ද, අර්ධ විෂ්කම්භය r ද වන සෘජු කේතුවක් පතුලේ සිට $\frac{h}{2}$ දුරකින් පිහිටි අක්ෂයට ලම්භව පිහිටි තලයකින් කැපීමෙන් ලැබෙන ඡින්නකය වක්‍ර පෘෂ්ඨය තිරස් තලයක් මත ගැටීමෙන් සමතුලිතතාවයේ තිබීමට නම්, $17h^2 > 28r^2$ විය යුතු බව පෙන්වන්න.

42. රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට සංයුක්ත වස්තුව නිර්මාණය කර ඇත්තේ සෘජු ඝන සිලින්ඩරයක් හා ඝන කේතුවක් එකිනෙක සම්බන්ධ කිරීමෙනි. සිලින්ඩරයේ අරය r ද, උස h ද වේ. ඝන කේතුවේ තල පෘෂ්ඨයේ අරය $2r$ හා උස h වේ. මෙම වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G ද, ඝන කේතුව හා ඝන සිලින්ඩරය හමුවන තලයේ කේන්ද්‍රය O ද වේ.

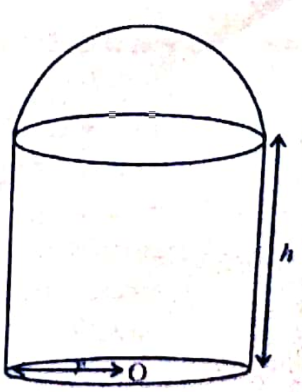


(i) $OG = \frac{1}{14}h$ බව පෙන්වන්න.

(ii) මෙම සෘජු වස්තුව සමතල මේසයක තබා ඇත. මෙම මේසය ක්‍රමයෙන් තිරසට කරගෙන යන විට තිරස සමඟ α කෝණයක් සාදන විට වස්තුව පෙරලීමට ආරම්භ කරයි. (මේසයේ තලය පෙරලීමට පෙර ලිස්සා යාම වැළකෙන පරිදි මේසය රළුය.)

(iii) පෙරලෙන අවස්ථාව වන විට r, h ඇසුරෙන් සොයන්න.

43. රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට ඒකාකාර ඝන සිලින්ඩරයක උස h වේ. පතුලේ අරය r වේ. මෙම ඒකාකාර සිලින්ඩරයට අර්ධ ඝන ගෝලයක් සවිකර ඇත. සිලින්ඩරයේ ස්කන්ධය 3M ද, අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධය 2M ද නම් හා O යනු පතුලේ තල පෘෂ්ඨයේ කේන්ද්‍රයයි.

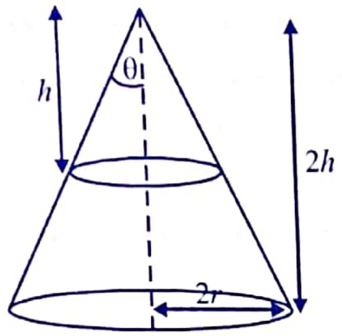


(i) O සිට ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\frac{14h+3r}{20}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) තිරසට α කෝණයක් ආනත තලයක මෙම සිලින්ඩරය තල පෘෂ්ඨයක් මත තබා ඇත. ($\alpha = \frac{4}{3}$) මෙම තලය මත ඝන වස්තුව ලිස්සා නොයන ලෙසට ප්‍රමාණවත් රළු බවක් ඇත්නම් හා ආනත තලයේ පෙරලී යයි නම්, h හි අගය r ඇසුරෙන් සොයන්න.

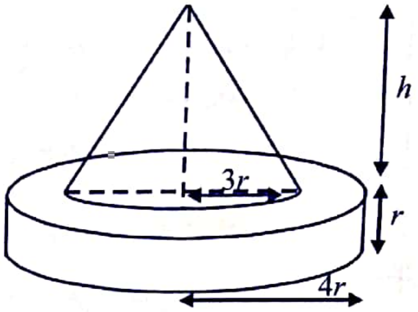
Scanned with CamScanner

44.



රූපයේ ආකාරයට ඝන කේතුවකින් කේතුවක් ඉවත්කර සෑදෙන ඡින්නකයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න.
ඡින්නකයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය තිරස් තලයක් මත තබා පෙරලීමට ආසන්නතම මොහොතේ ඇත්නම් අඩ සිරස් කෝණය θ සොයන්න.

45. O සිට වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර $\dfrac{32r^2 + 62rh + 9h^2}{4(16r + 3h)}$ බව පෙන්වන්න. වස්තුව තිරසට α ආනත රළු තලයක් මත තබා ඇත. තලය ලිස්සීම වැළැක්වීමට තරම් රළු වේ. $h = 4r$ වන විට වස්තුව පෙරලීමට ආසන්නව පවතී නම්, α සොයන්න.



46. a අරය ඇති වෘත්තයක කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක හැඩය ඇති ඒකාකාර ආස්තරයක් OA, OB අරයයන් වලින් මායිම් වී තිබේ. AOB = 2∅ නම්, ආස්තරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය O සිට $\left[\dfrac{2a}{3}, \dfrac{\sin \varnothing}{\varnothing}\right]$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

OA මත C ද, OB මත D ද පිහිටන OCD කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක් OAB ආස්තරයෙන් ඉවත් කරනු ලැබේ. එහි ඉතිරි CABD කොටස CA සෘජු දාරය තිරස් මේසයක් මත පිහිටන සේ තිරස් තලයක නිශ්චලතාවයේ පවතී.

$OC \leq \dfrac{a}{2}\left[\dfrac{\sqrt{1 + 4\sin 2\varnothing}}{3\varnothing - \sin 2\varnothing} - 1\right]$ බව පෙන්වන්න.

47. අරය a වූ වෘත්තයක පර්යන්ත අරයන්ගෙන් 2θ කෝණයක් වෑහෙන වෘත්ත කොටසක කේන්ද්‍රකය කේන්ද්‍රයේ සිට $\dfrac{2a\sin\theta}{3\theta}$ දුරකින් බව පෙන්වන්න.

අරය a වූ වෘත්ත පාදකයක හැඩය ගත් ඒකාකාර ආස්තරයක් OA හා OB අරයන්ගෙන් පර්යන්ත වේ. කේන්ද්‍රය O හා අරය r වූ OPQ වෘත්ත පාදකයක් ආස්තරයෙන් ඉවත් කරනු ලැබේ. ආස්තරය සිරස් තලයක PA දාරය තිරස් පොළවේ ස්පර්ශ වන සේ නිශ්චලව පිහිටයි. එය ආස්තරයේ සිරස් තලයෙහි ඇද වැටෙන අවස්ථාවේ පිහිටයි නම්, $r = \dfrac{a}{2}\left\{\dfrac{\sqrt{9\pi^2 + 24\pi - 48}}{3\pi - 4} - 1\right\}$ බව පෙන්වන්න.

48. (i) උස h වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්ත කේතුවක

(ii) අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න. ඝනත්වය ρ ද, ආධාරකයේ අරය a ද, උස $4a$ ද වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්ත කේතුක සහ ඝනත්වයට 1ρ ද ආධාරක අරය a ද වූ ඒකාකාර අර්ධ ගෝලයක් ඒවායේ ආධාරක සමපාත වන පරිදි එකට සම්බන්ධ කිරීමෙන් සංයුක්ත වස්තුවක් ආකාරයේ කෙලි බඩුවක් තනා තිබෙයි. පොදු ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට කෙලිබඩුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර සොයන්න. කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය සුමට තිරස් තලයක් සමඟ ස්පර්ශ වෙමින් කෙලිබඩුව ස්ථායී සමතුලිතතාවයේ පැවතිය නොහැකි නම්, $\lambda > 20$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

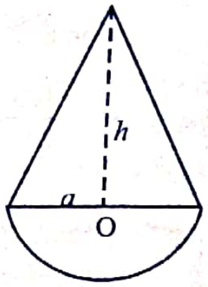
49. h උසැති ඒකාකාර සෘජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කේතුවේ ශීර්ෂයේ සිට $\frac{3h}{4}$ දුරකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. අරය r ද, උස h ද වන ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක් සිදුරු කර හෑරීමෙන් අරය r හා උස $\frac{h}{2}$ වන ඝන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක් ඉවත් කරනු ලබන්නේ කේතුවේ ආධාරකය සිලින්ඩරයේ එක් කෙළවරක් සමඟ සමපාත වන පරිදිය. ඉතිරි වන කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කේතුවේ ආධාරකයේ සිට අක්ෂය මත $\frac{23h}{40}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

හාරන ලද සිලින්ඩරය එහි ආධාරකය තිරස් තලයක් මත පිහිටන සේ තබනු ලැබේ. මෙම තලය ක්‍රමයෙන් උඩු අතට ඇල කරන විට ලිස්සා යාම වැළැක්වීමට ප්‍රමාණවත් පරිදි තලය රළු නම්, හාරන ලද සිලින්ඩරය ඇද වැටීම සඳහා තිරස සමඟ තලයට තිබිය යුතු අඩුම ආනතිය සොයන්න.

50. අරය $5r$ වූ අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨයක් සහ හරස්කඩෙහි අරය $4r$ වූද, උස h වූද, සිලින්ඩරාකාර පෘෂ්ඨයක් එකම වෘත්තාකාර තුනී ද්‍රව්‍යයෙන් සාදා තිබේ. සිලින්ඩරයේ එක් කොනක වෘත්තාකාර ගැටිය අර්ධ ගෝලයේ අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ කරමින් සිලින්ඩරයේ අක්ෂය අර්ධ ගෝලයේ ගැටියේ තලයට ලම්භව සිටින එක් වස්තුවක් වන පරිදි මේවා සවිකොට ඇත. මේ වස්තුව සමමිතික සමතුලිතතාවයෙන් තිරස් තලයක් මත තබා ඇත්තේ අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨය තලය ස්පර්ශ කරමිනි. $2h > / < (\sqrt{161} + 6)\, r$ වන අන්දම අනුව සමතුලිතතාවය ස්ථායී, උදාසීන, අස්ථායී බව ඔප්පු කරන්න.

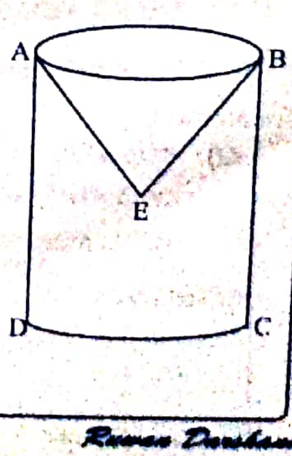
51. තුනී ඒකාකාර ලෝහ තහඩුවකින් සාදන ලද භාජනයක් කේතු ඡින්නකයක ආකාරයෙන් යුක්ත වන අතර එහි කුඩා කෙළවර වසා තිබේ. භාජනයේ උස h ද වෘත්තාකාර කොටස්වල අරයන් a සහ $2a$ ද වෙයි. භාජනයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට කුඩා කෙළවරේ සිට දුර $\frac{5lh}{9l+3a}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $l = \sqrt{a^2+h^2}$ $h = \frac{4a}{3}$ නම්, තිරස් තලය මත වක්‍ර පෘෂ්ඨය ගැටෙමින් සමතුලිතතාවේ තිබිය නොහැකි බව පෙන්වන්න.

52. රූපයේ දැක්වෙන වස්තුව කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයකින් සහ පොදු ආධාරයකයෙහි දී දෘඪ ලෙස බද්ධ කර ඇති ආධාරකයේ අරය a සහ h උස එම ඝනත්වයම සහිත ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවකින් සමන්විත වෙයි. කේතුවේ සහ අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රවලට O සිට දුර අනුකලනය මගින් සොයන්න. ඒ නයින් සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{h^2 - 3a^2}{4\,(h + 2a)}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. සංයුක්ත වස්තුව සමමිතික අක්ෂය සිරස් වන පරිදි අර්ධ ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය රළු තිරස් ගෙබිමක් මත තබා ඇත. එය සමමිතික අක්ෂය සිරස සමඟ කුඩා කෝණයක් සාදන පරිදි මෙම සමතුලිත පිහිටීමෙන් යන්තම් විස්ථාපනය කරනු ලැබේ. $h > \sqrt{3}a$ වෙයි නම්, වස්තුව ඇද වැටෙන බව පෙන්වන්න.



(i) $h < \sqrt{3}a$ (ii) $h = \sqrt{3}a$ නම් කුමක් සිදුවෙයිද?

53. රූප සටහනෙන් උස H හා ආධාරකය R වූ ABCD ඒකාකාර ඝන සෘජුවෘත්තාකාර සිලින්ඩරයකින් උස h හා ආධාරකයේ අරය R වූ ඝන සෘජු වෘත්තාකාර EAB කේතුවක් හාරා ඉවත් කිරීමෙන් පසුව ඉතිරි කොටස දැක්වේ. එසේ හෑරීමෙන් ලැබෙන S වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට AB සිට ඇති දුර සොයන්න. ඒනයින් S හි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය E හි ඇත්නම් එවිට $h = (2 - \sqrt{2})\,H$ බව පෙන්වන්න.



S වස්තුව තිරස සමඟ $\alpha \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන රළු තලයක් මත DC ආධාරකය තලය මත වන පරිදි තබා ඇත. S ලිස්සීමෙන් වැළැක්වීමට තරම් තලය රළු වෙයි. S හි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය E හි ඇතැයි උපකල්පනය කරමින් $R \cot \alpha > (\sqrt{2} - 1)\,H$ නම්, S ඇද නොවැටෙන බව පෙන්වන්න.

54. ශීර්ෂය O අඩ සිරස් කෝණය α සහ උස h වූ ආධාරක රහිත කුහර කේතුවක් ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය σ වූ ඒකාකාර තුනී ලෝහ තහඩුවකින් සාදා තිබේ. එහි ස්කන්ධය $\pi h^2 \sec\alpha \tan\alpha\sigma$ බව පෙන්වා, එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න. එම වර්ගයේම ලෝහ තහඩුවකින් සැදී කේන්ද්‍රය B සහ අරය $h\tan\alpha$ වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක් ඉහත කේතුවේ ආධාරකය ලෙස සවිකර ඇත.

සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට දුර $\left(\dfrac{\frac{2}{3}\sec\alpha + \tan\alpha}{\sec\alpha + \tan\alpha}\right)$ බව පෙන්වන්න.

සංයුක්ත වස්තුව ආධාරකයේ දාරයේ පිහිටි A නම් ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලනු ලැබේ. AO සහ AB යටි සිරස සමඟ සමාන කෝණ සාදයි නම්, $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.

G

55. අරය a වූ ඒකාකාර ගෝලීය කබොලක් එහි කේන්ද්‍රය වූ O ට $a\cos\alpha$ දුරකින් $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ වූ තලයක් මගින් කොටස් දෙකකට බෙදනු ලැබේ. වඩා විශාල කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත O ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\dfrac{a}{2}(1-\cos\alpha)$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. කබොලේ වඩා විශාල කොටස එම ද්‍රව්‍යයෙන්ම සැදි අරය $a\sin\alpha$ වූ තැටියකින් වසනු ලැබේ. එසේ සෑදුනු සංයුක්ත වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ O ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\dfrac{a(1-\cos\alpha)^2}{3-\cos\alpha}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

56. තුනී ඒකාකාර ද්‍රව්‍යයකින් සැදි කෝප්පයක් අර්ධ විෂ්කම්භය a වන කුහර ගෝලයකින් කපාගත් කොටසකින් හා පතුල වශයෙන් ඊට සම්බන්ධ කොට ඇති අර්ධ විෂ්කම්භය $a\sin\alpha$ වන වෘත්තාකාර පෙත්තකින් සමන්විත වේ. කෝප්පයේ ගැට්ට පිහිටන තලය පතුලේ පෙත්තට සමාන්තර වේ. ගැට්ටේ අර්ධ විෂ්කම්භය $a\sin\beta$ නම්, $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ වන විට කෝප්පයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට පතුලේ සිට ඇති දුර $\dfrac{a(\cos\alpha-\cos\beta)^2}{a(\cos\alpha-\cos\beta)+\sin^2\alpha}$ බව පෙන්වන්න.

57. අරය $2r$ වූ කුහර ඒකාකාර අර්ධ ගෝලයක් ආධාරකයේ C කේන්ද්‍රයේ සිට $r\sqrt{3}$ දුරකදී එහි අක්ෂයට ලම්භ තලයක් මගින් කොටස් දෙකකට බෙදා තිබෙයි. වෘත්ත දාර දෙකක් සහිත R කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය C හි සිට $\dfrac{r\sqrt{3}}{2}$ දුරකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

අරය r ද, උස h ද වූ ඒකාකාර කුහර වෘත්ත සිලින්ඩරයක එක් කෙළවරක් වසා තිබෙන අතර අනෙක් කෙළවරට R කොටසේ r අරය සහිත වෘත්ත දාරය මැලියම් යොදා අලවා බඳුනක් සාදා තිබෙයි. අර්ධ ගෝලය සහ සිලින්ඩරය එකම පෘෂ්ඨික ඝනත්වය ඇති ද්‍රව්‍යයකින් තනා ඇතැයි උපකල්පනය කර බඳුනේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සිලින්ඩරයේ සංවෘත ආධාරකයේ සිට $\dfrac{h^2+6r^2+4\sqrt{3}rh}{2h+r+4\sqrt{3}r}$ දුරකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

58. අරය a වන ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක සමාන්තර ජ්‍යාය දෙකක් එහි කේන්ද්‍රයේදී 2α, 2β කෝණ ආපාත කරයි. වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයේ සිට ජ්‍යාය දෙක අතර වූ තැටියක, කොටසේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\dfrac{2a^3(\sin^3\alpha-\sin^3\beta)}{3a}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි A යනු රූපයේ වර්ගඵලයයි.

Scanned with CamScanner

59. ශීර්ෂය O අඩ සිරස් කෝණය α සහ උස h වූ ආධාරක රහිත කුහර කේතුවක් ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය σ වූ ඒකාකාර තුනී ලෝහ තහඩුවකින් සාදා තිබේ. එහි ස්කන්ධය $\pi h^2 \sec\alpha \tan\alpha$ බව පෙන්වා, එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න. එම වර්ගයේම ලෝහ තහඩුවකින් සැදි, කේන්ද්‍රය B සහ අරය $h \tan\alpha$ වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක් ඉහත කේතුවේ ආධාරකය ලෙස සවිකර ඇත. සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට දුර $\dfrac{h\left(\frac{2}{3}\sec\alpha + \tan\alpha\right)}{(\sec\alpha + \tan\alpha)}$ බව පෙන්වන්න. සංයුක්ත වස්තුව ආධාරකයේ දාරයේ පිහිටි A නම් ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලනු ලැබේ. AO සහ AB යටි සිරස සමඟ සමාන කෝණ සාදයි නම්, $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.

60. අරය a වන ඒකාකාර ගෝලීය කබොලක්, එහි කේන්ද්‍රය වූ O ට $a\cos\alpha$ දුරින් $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ වූ තලයක් මගින් කොටස් දෙකකට බෙදනු ලැබේ. වඩා විශාල කොටසේ ස්කන්ධය $2\pi a^2 (1 + \cos\alpha)\rho$ බව පෙන්වන්න. මෙහි ρ යනු කබොලේ ඝනත්වයයි.

(i) වඩා විශාල කොටසේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O ලක්ෂ්‍යයේ සිට දුර $\dfrac{a}{2}(1 - \cos\alpha)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) කබොල සෑදී ඇති ද්‍රව්‍යයෙන්ම තනා ඇති අරය $a\sin\alpha$ වූ තැටියකින් මෙම කොටස වසනු ලැබේ. එසේ සෑදුනු සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට දුර $\dfrac{a(1-\cos\alpha)^2}{3-\cos\alpha}$ බව පෙන්වන්න.

H

61. අරය a ද O කේන්ද්‍රයේදී රේඩියන් 2θ කෝණයක් ආපාතනය කරන්නාවූ ද ACB ඒකාකාර වෘත්ත චාපයක G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC මධ්‍ය අරය මත පිහිටන බවත් $OG = \dfrac{a(\sin\theta)}{\theta}$ බවත් පෙන්වන්න.
එකම ඒකාකාර කම්බියෙන් ලබාගත් එහෙත් වෙනස් අර සහිත වෘත්තාකාර කැබලි දෙකක් අතුරෙන් ඒකාකාර S_1 අර්ධ වෘත්තයක්ද අනෙකින් කේන්ද්‍රයේදී රේඩියන් 2θ (< π) කෝණයක් ආපාතනය කෙරෙන S_2 වෘත්ත චාපයක්ද එකට තබා ඇත්තේ ළසදක් සෑදෙන පරිදිය. θ කෝණය කෙසේද යත් ළසදෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය S_2 ඇතුළු චාපය මත පිහිටන පරිදි වෙයි නම්, $\sin^2\theta - \sin\theta\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right) + \dfrac{\pi}{4}\sin 2\theta = \theta$ බව පෙන්වන්න.
[1992 A/L]

62. ආධාරකයේ අරය r ද, අඩ සිරස් කෝණය α ද වන ඒකාකාර සෘජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ශීර්ෂයේ සිට $\dfrac{3r}{4}\cot\alpha$ දුරකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. ඒකාකාර සෘජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ඡින්නකයක වෘත්තාකාර දෙකෙළවරේ අරයන් a හා λa $(\lambda > 1)$ ද උස h ද වේ. $\dfrac{h(3\lambda^2 + 2\lambda + 1)}{4(\lambda^2 + \lambda + 1)}$ බව පෙන්වන්න. කුඩාතම ආධාරකයෙහි පරිධියෙහි වූ ලක්ෂ්‍යයකින් ඡින්නකය නිදහස් ලෙස එල්ලනු ලැබේ. සමතුලිතතා පිහිටීමේදී අක්ෂය සිරසට α $\left(< \dfrac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනත වෙයි.
tan α සොයන්න.
[1991 A/L]

63. ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක අරය a හා කේන්ද්‍රය O වේ. එහි සෘජු දාරය AOB හා සමමිතික අක්ෂය OC වේ. පිළිවෙලින් OB හා OC දිගේ OX හා OY සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසිය අක්ෂ ගනු ලැබේ. මෙම අක්ෂ පද්ධතිය අනුබද්ධයෙන් ආස්තරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක $\left(O, \dfrac{4a}{3\pi}\right)$ බව අනුකලනය මගින් පෙන්වන්න. ආස්තරය මත අරය $r\,(< a)$ වූ අර්ධ වෘත්තයක් ඇඳිනු ලැබේ.

Scanned with CamScanner

එම අර්ධ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය පිහිටන්නේ AO මත A සිට r දුරකින්ය. මෙම අර්ධ වෘත්තය ඇතුලත වර්ගඵලය සහිත කොටස කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. ඉහත OXY අක්ෂ පද්ධතිය අනුබද්ධයෙන්ම ආස්තරයක් ඉතිරි වන R කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙහි $(\bar{x}, \bar{y})$ ඛණ්ඩාංක $\bar{x} = \dfrac{r^2}{a+r}$ $\bar{y} = \dfrac{4(a^2+ar+r^2)}{3\pi(a+r)}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි R කොටස A ලක්ෂ්‍යයෙන් නිදහසේ එල්ලා ඇති නම් සමතුලිත පිහිටීමේදී OB දාරයෙහි සිරසට ආනතිය r කෙරෙහි ස්වායක්ත බව පෙන්වා එම නියත ආනතිය සොයන්න.

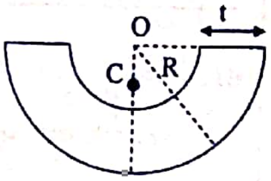
[1999 A/L]

64. අරය r වූ සිහින් ඒකාකාර අර්ධ වෘත්ත කම්බියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කේන්ද්‍රයේ සිට $\dfrac{2r}{\pi}$ දුරකින් සමමිතික අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. එනයින් a අරයෙන් යුත් ඒකාකාර අර්ධ වෘත්ත ආස්තරයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න. බර W වූ ඒකාකාර අර්ධ වෘත්ත ආස්තරයක අර්ධ වෘත්ත දාරය වටා w බරැති ඒකාකාර සිහින් කම්බියක්, රාමුවක් ලෙස යොදා තිබෙයි. පද්ධතිය A ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා ඇති විට, AB සරල දාරය සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි. $\dfrac{W}{w} = \dfrac{\frac{\pi}{2} - \tan\theta}{\tan\theta - \frac{4}{3\pi}}$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\dfrac{4}{3\pi} < \tan\theta < \dfrac{2}{\pi}$ බව අපෝහනය කරන්න.

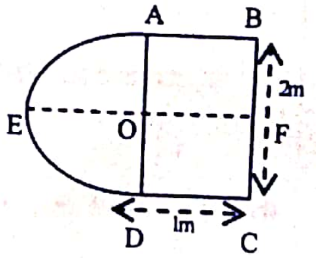
65. අරය r වන ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය O කේන්ද්‍රයේ සිට සමමිතික අරය මත $\dfrac{3r}{8}$ දුරින් බව පෙන්වන්න. රූපයේ දැක්වෙන අරය r වන ඝන අර්ධ ගෝලයෙන් අරය $r - t$ වන ඝන අර්ධගෝලය ඉවත් කර පාත්‍රය සාදා ඇත. ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය C නම්, $OC = \dfrac{3r}{8}\left[\dfrac{1-(1-\alpha)^4}{1-(1-\alpha)^3}\right]$ බව පෙන්වන්න.

$\alpha = \dfrac{t}{r}$ වේ. $t = \dfrac{r}{10}$ නම් $\dfrac{OC}{r}$ හි අගය සොයන්න.



a කුඩා විට, $(1-a)^3 = 1-3a$ සහ $(1-a)^3 = 1-4a$ බව පෙන්වන්න. එමගින් කුහර අර්ධ ගෝලයක් විට $OC = \dfrac{r}{2}$ බව, ලබාගන්න.

66. ඒකාකාර ආස්තරයක් රූපයේ ඇත. ADE අර්ධ වෘත්ත ආස්තරයකි. ABCD සෘජුකෝණාස්‍ර ආස්තරයකි. AD = 2m, AB = 1m වේ.



(i) BC සිට ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර සොයන්න.

(ii) ආස්තරය A වලින් එල්ලා සමතුලිත විට, AD සිරසට ආනත කෝණය සොයන්න.

(iii) ආස්තරයේ ස්කන්ධය M වේ. ස්කන්ධය $\dfrac{M}{5}$ වන P අංශුවක් EF අක්ෂය මත සවිකර ඇත. A වලින් එල්ලා සමතුලිත විට AD සිරස් වේ. අංශුව සවිකර ඇත්තේ සෘජුකෝණාස්‍ර කොටසේද, අර්ධ වෘත්ත ආස්තර කොටසේදැයි සොයන්න. AD සිට P ට දුරද සොයන්න.

67. කේන්ද්‍රය O ද අරය a ද වූ ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක සෘජු දාරය AOB ද සමමිතික අක්ෂය OC ද වෙයි. OB සහ OC ඔස්සේ, Ox, Oy කාටීසිය සෘජුකෝණී අක්ෂ ගැනීමෙන් සහ අනුකලනය භාවිතයෙන් ආස්තරයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක $\left(0, \dfrac{4a}{3\pi}\right)$ බව පෙන්වන්න.

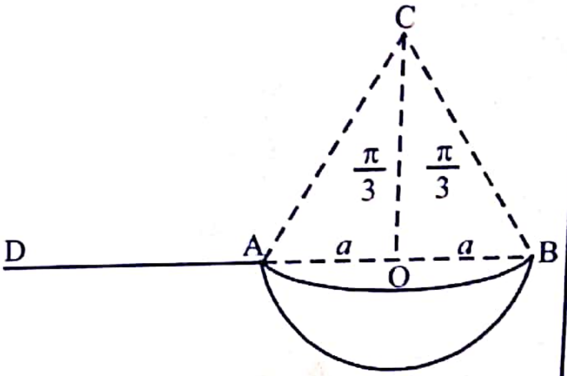
අරය r $(< a)$ වූ අර්ධ වෘත්තාකාර කොටසක් ඉහත දැක්වූ තහඩුවෙන් කපාඉවත්කරනු ලැබේ. ඉවත් කරන අර්ධ වෘත්තාකාර කොටසේ කේන්ද්‍රය P, OA මත පිහිටන අතර, A සිට P ට දුර r ය. ඉහත දැක්වූ අක්ෂය පද්ධතිය අනුබද්ධයෙන් ඉතිරි කොටසේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක $(\bar{x}, \bar{y})$ වන විට $\bar{x} = \dfrac{r^2}{a+r}$, $\bar{y} = \dfrac{4(a^2+ar+r^2)}{3\pi(a+r)}$ බව පෙන්වන්න. මෙම කොටස A ගෙන් එල්ලූ විට, සමතුලිත

Scanned with CamScanner

පිහිටීමේදී AOB දාරය සිරසට ආනතිය r මගින් ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න. මෙම නියත ආනතිය $\tan^{-1}\dfrac{4}{3\pi}$ බව ද පෙන්වන්න.

68. ඒකාකාර සිහින් ද්‍රව්‍යකින් තනා ඇති කුහර වස්තුවක් පොදු වෘත්තාකාර ආධාරකයක් දිගේ අර්ධ ගෝලයකට යා කරන ලද සිරස් කෝණය 2α වූ ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්වරූපය ගනී. කේතුව සහ අර්ධ ගෝලය පිහිටා ඇත්තේ ආධාරකය දෙපසිනි. $6\cos\alpha = \sqrt{37} - 1$ නම් සුමට තිරස් තලයක් මත අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨයේ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් ස්පර්ශ වෙමින් වස්තුව සමතුලිතතාවයේ පිහිටන බව පෙන්වන්න.

69. ළසඟ හැඩ ඒකාකාර ආස්තරයක්, රූපයේ දැක්වෙන පරිදි කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වූ අර්ධ වෘත්තයකින් සහ ස්වකීය C කේන්ද්‍රයේදී කෝණයක් ආපාතනය කරන වෘත්ත චාපයකින් පර්යන්තගත වේ. ආස්තරයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, C සිට ka දුරින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. මෙහි $k = \dfrac{3\sqrt{3}\pi}{\pi + 6\sqrt{3}}$ වේ. ආස්තරයේ ස්කන්ධය M යයි ගනිමු.



දිග $2a$ සහ ස්කන්ධය m වන AD සිහින් ඒකාකාර ඍජු දණ්ඩක් දික් කරන ලද BA රේඛාව දිගේ පිහිටන පරිදි A කෙළවරේදී රූපයේ දැක්වෙන පරිදි ළසඟට සවිකර දෘඪකැත්තක් සාදා ඇත. ආස්තරයේ තලය සිරස්ව, අර්ධ වෘත්තය සහ දණ්ඩේ D කෙළවර ගෙබිම ස්පර්ශ කරන පරිදි දෘඪකැත්ත තිරස් ගෙබිමක් මත තබා තිබේ. මෙම පිහිටීමේදී එය සමතුලිතව පවතී නම්, $M(\sqrt{3}k - 1) < 4\sqrt{6}m$ බව පෙන්වන්න.

70. අරය a වූ වෘත්ත පාදකයක හැඩය ගත් ඒකාකාර ආස්තරයෙන් OA සහ OB අරයන්ගෙන් පර්යන්ත වෙයි. කේන්ද්‍රය O සහ අරය r වූ OPQ වෘත්ත පාදකයක් ආස්තරයෙන් ඉවත් කරනු ලැබේ. PA දාරය තිරස් තලයක් ස්පර්ශ කරමින් ආස්තරය සිරස් තලයක නිසල පිහිටයි. ආස්තරය සිරස් තලයේ ඇද වැටෙන අවස්ථාවේ පිහිටයි නම් $r = \dfrac{a}{2}\left\{\dfrac{\sqrt{9\pi + 24\pi - 48}}{3\pi - 4} - 1\right\}$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner